

Beispiele zur Lebensversicherungsmathematik

Übungen aus Finanz- und Versicherungsmathematik 1, SS 2001

1. Eine Obligation soll mit fünf jährlichen Zahlungen von 15.000 € abbezahlt werden, wobei die erste Zahlung am 31. Dezember 2009 fällig ist. Um die nötigen Geldmittel zur Verfügung zu haben, begann die Gesellschaft am 1. Jänner 2000 jährliche Einzahlungen in Höhe von X € auf ein Konto mit jährlicher Zinsrate von 6%. Die letzte dieser Einzahlungen soll am 1. Jänner 2009 erfolgen. Wie hoch muss der jährlich eingezahlte Betrag X sein?
2. Wenn die Obligation aus Beispiel 1 mit 60 monatlichen Zahlungen von 1250 € statt der fünf jährlichen Zahlungen abgegolten werden soll, wobei monatliche Verzinsung bei einem nominellen Zinssatz von 6% stattfindet, wie hoch muss X sein?
3. Bei einer ewigen nachschüssigen Rente steige der jährliche Betrag gemäß $(1+k)$, $(1+k)^2$, $(1+k)^3$, ... Bei einer jährlichen effektiven Zinsrate von 4% beträgt der Barwert zu Beginn des ersten Jahres genau 51. Wie groß ist k ?
4. Wie Beispiel 3, jedoch wird der jährliche Betrag von $(1+k)^n$ unterjährig in monatlichen Raten ausbezahlt. Wie gross ist k ?
5. Wie Beispiel 3, jedoch mit einer ewigen vorschüssigen Rente, also Auszahlung zu Jahresbeginn statt zu Jahresende.
6. Es sei

$${}_t p_x = \frac{120 - x - t}{120 - x}$$

für $0 \leq x < 120$ und $0 \leq t \leq 120 - x$. Berechne μ_{55} sowie die zukünftige Lebenserwartung eines 55-jährigen.

7. Berechne ${}_{20}p_x$ für $\mu_{x+t} = \frac{1}{85-t} + \frac{3}{105-t}$ mit $0 \leq t < 85$.
8. Für $l_x = \sqrt{121 - x}$, $0 \leq x \leq 121$ berechne die Wahrscheinlichkeiten, dass ein(e) 21-jährige(r) (a) ein Alter von 40 Jahren erreicht, (b) das Alter von 72 Jahren nicht erreicht, (c) das Alter von 35 Jahren erreicht, nicht aber jenes von 57 Jahren und (d) das Alter von 122 Jahren erreicht. Betrachte weiters zwei unabhängige Personen, wobei die eine 40, die andere 21 Jahre alt ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass (e) beide 57 Jahre alt werden, (f) beide zwar 57 Jahre alt werden, aber nicht 72 Jahre und (g) beide noch 50 Jahre leben?

9. Betrachte zwei unabhängige Leben, die sich nur dadurch unterscheiden, dass die eine Person ein Raucher ist, die andere nicht. Für $0 \leq x < \omega$ sei μ_x die Sterbeintensität des Nicht-Rauchers, die des Rauchers hingegen $c\mu_x$ mit einer Konstanten $c > 1$. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die verbleibende Lebenszeit des Rauchers die des Nicht-Rauchers übersteigt.
10. Für eine Überlebenswahrscheinlichkeit von $s(t) = {}_t p_0 = 1 - \frac{t}{100}$ für $0 \leq t \leq 100$ und eine Zinsintensität $\delta = 0.1$ berechne $50.000 \bar{A}_{30}$.
11. Eine stetige lebenslängliche Todesfallsversicherung wird an eine 50-jährige Person ausgestellt. Die Sterblichkeit folge de Moivre's Gesetz (Gleichverteilung des Todeszeitpunktes zwischen 0 und ω Jahren mit $\omega = 100$, es gelte einfacher Zins von $i = 0.01$, und die Auszahlung betrage $b_t = 1000 - \frac{t^2}{10}$. Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariable, die den momentanen Wert dieser Versicherung angibt.
12. Eine lebenslängliche Todesfallsversicherung mit Einmalprämie, ausgestellt auf eine x -jährige Person gewährt für die ersten 20 Jahre einen Versicherungsschutz von 10.000 €, danach von 20.000 €. Außerdem wird im Todesfall innerhalb von 20 Jahren die einmalige Einzahlung ohne Zinsen rückerstattet. Die Einzahlung geschieht zu Beginn des ersten Jahres, die Auszahlung am Ende des Todesjahres. Wie groß muss die Nettoeinmalprämie sein, ausgedrückt durch die Kommutationszahlen?
13. Eine Versicherung ausgestellt an eine x -jährige Person zahlt 10.000 € nach 20 Jahren, wenn die Person dann noch am Leben ist, oder die Nettoeinmalprämie A am Ende des Todesjahres, falls die Person vorher verstirbt. Drücke A durch die Kommutationszahlen aus.

Wird bei einer Lebensversicherung die Versicherungssumme nicht am Ende des Todesjahres ausbezahlt, sondern bereits am Ende des entsprechenden m -ten Teil des Jahres, so gilt $A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x$ unter der Annahme, dass die Todesfälle innerhalb des Jahres gleichverteilt sind (Fall a aus der Vorlesung).

Bei einer Leibrente entspricht dem eine Auszahlung von $1/m$ zu m Zeitpunkten pro Jahr, die entsprechende Nettoeinmalprämie wird mit $\ddot{a}_x^{(m)}$ bezeichnet und kann z.B. als

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}} \ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}} (A_x^{(m)} - A_x) = \alpha(m) \ddot{a}_x - \beta(m)$$

mit $\alpha(m) = \frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}}$ und $\beta(m) = \frac{i-i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}}$ ausgedrückt werden. Bei einer temporären Leibrente gilt dementsprechend

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_n p_x v^n \ddot{a}_{x+n}^{(m)}.$$

Auch die jährlichen Nettoprämien $P_x^{(m)}$, $P_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ etc. können leicht berechnet werden, indem in der entsprechenden Definition \ddot{a}_x und $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ einfach durch $\ddot{a}_x^{(m)}$ und $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ ersetzt werden.

14. Eine Leibrente zahle m mal pro Jahr einen Betrag von $1/m$ aus. Leite obige Formel für $\ddot{a}_x^{(m)}$ her, ausgedrückt durch $i^{(m)}$, $d^{(m)}$, d , i und \ddot{a}_x .
15. Vergleiche drei Leibrenten, die jeweils pro Jahr einen Betrag von 1 ausschütten und einen Zinssatz von $i = 0.04$ aufweisen. Die eine Rente werde am Ende jeden Jahres ausgeschüttet, die zweite halbjährliche und die dritte monatlich.
16. Berechne $\ddot{a}_{50:\overline{30}|}^{(2)}$ unter Fall a aus der Vorlesung (Linearität von ${}_uq_x$), einer effektiven jährlichen Zinsrate von 5% und folgenden Kommutationszahlen, berechnet aus einer Sterbetafel:

x	50	60	70	80	90	100
D_x	4859.3	2482.16	1119.94	369.99	55.87	1.18
N_x	64467.45	27664.55	9597.05	2184.81	203.85	2.51

Berechne damit weiters $P_{50:\overline{30}|}^{(2)1}$.

17. Gleich wie Beispiel 16, jedoch mit monatlicher Auszahlung und einer Dauer von nur 20 Jahren.

Zwei interessante Typen von Lebensversicherungen sind die sogenannten "standard increasing" und die "standard decreasing" Lebensversicherungen. Bei der Lebensversicherung vom Typ "standard increasing" beträgt der im Jahr k versicherte Betrag genau k , bei "standard decreasing" genau $n - k$. Diese Versicherungen können auch angesehen werden als Summe von konstanten Lebensversicherungen über einen Betrag von 1, die jeweils ein Jahr später beginnen oder enden. Damit ergibt sich für eine lebenslängliche Todesfallsversicherung die Netto-Einmalprämie

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

Für eine n -jährige Todesfallsversicherung können die Netto-Einmalprämien für "standard increasing", $(IA)_{x:\overline{n}|}^1$ und $(DA)_{x:\overline{n}|}^1$ für "standard decreasing" ausgedrückt werden als:

$$\begin{aligned} (IA)_{x:\overline{n}|}^1 &= A_{x+1|} + A_{x+2|} + \dots + A_{x+n-1|} - A_{x+n|} \\ &= nA_{x:\overline{n}|}^1 - A_{x:\overline{n-1}|}^1 - A_{x:\overline{n-2}|}^1 - \dots - A_{x:1|}^1 \\ (DA)_{x:\overline{n}|}^1 &= A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n-1}|}^1 + A_{x:\overline{n-2}|}^1 + \dots + A_{x:1|}^1 \end{aligned}$$

Analog kann eine "standard increasing" Rente definiert werden, die in Jahr k einen Betrag von $k+1$ ausbezahlt. Die Netto-Einmalprämie beträgt $(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k (k+1)p_x$ und es gelten die Relationen $\ddot{a}_{\overline{n}|} = d(I\ddot{a})_{\overline{n}|} + nv^n$ und $\ddot{a}_x = d(I\ddot{a})_x + (IA)_x$.

Wird die Rente in m Teilzahlungen pro Jahr mit jährlicher Steigerung ausgeschüttet (also m Zahlungen von je $z_{k+j/m} = \frac{k+1}{m}$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ im Jahr m), so gilt

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} = \alpha(m)(I\ddot{a})_x - \beta(m)\ddot{a}_x$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - nv^n {}_n p_x)$$

18. Zeige, dass sich $\frac{(IA)_x - A_{x:\overline{1}|}}{(IA)_{x+1} + A_{x+1}}$ vereinfacht zu vp_x . (Tip: Benutze die Rekursionsrelation $(IA)_x = A_{x:\overline{1}|}^1 + vp_x(A_{x+1} + (IA)_{x+1})$ oder drücke obigen Bruch durch Kommutationszahlen aus).
19. Für ${}_t p_x = \frac{120-x-t}{120-x}$ mit $0 \leq x < 120$ und $0 \leq t \leq 120-x$ berechne $(IA)_{x:\overline{3}|}^1$ für einen Zinssatz von 6%.
20. Berechne $(I\ddot{a})_{70:\overline{10}|}^{(12)}$, wenn $\alpha(12) = 1.00028$, $\beta(12) = 0.46812$ gegeben sind, sowie die Todesfälle innerhalb eines Lebensjahres als gleichverteilt angenommen sind. Weiters ist gegeben:

x	69	70	71	72	...	79	80	81	82
S_x	77.94	67.117	57.52	49.043	...	13.483	10.875	8.69	6.875

Tip: Drücke alles durch die Kommutationszahlen aus, $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$ kann geschrieben werden als $\frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}$, ebenso die restlichen Terme.

21. Berechne p_{73} aus folgenden Werten, wobei $i = 0.03$ gilt:

x	72	73	74	75
\ddot{a}_x	8.06	7.73	7.43	7.15

22. Betrachte eine vorschüssige Leibrente, deren ausbezahlter Betrag jedes Jahr um 3% der vorigen Zahlung steigt, und leite eine Formel für die Nettoeinmalprämie her.
23. Berechne für $l_x = 100.000(100 - x)$, $0 \leq x \leq 100$ und $i = 0$ den Barwert einer lebenslänglichen Leibrente, die an eine 80-jährige Person ausgestellt wird. Die Rente soll stetig ausbezahlt werden mit einer jährlichen Rate von 1 im ersten Jahr und einer Rate von 2 in den späteren Jahren.
24. Die Situation sei wie in Beispiel 23, jedoch sei die Rente nur 5 Jahre dauernd (temporär). Berechne den Barwert.
25. Es seien ${}_{20}P_{25} = 0.046$, $P_{25:\overline{20}|} = 0.064$ und $A_{45} = 0.640$ gegeben. Berechne $P_{25:\overline{20}|}^1$.
26. Zeige, dass sich

$$1 - \frac{\left(P_{30:\overline{15}|} - {}_{15}P_{30}\right) \ddot{a}_{30:\overline{15}|}}{v^{15} {}_{15}p_{30}}$$

vereinfachen lässt zu A_{45} .

27. Bei einer Lebensversicherung über 10.000 €, ausgestellt an eine x-jährige Person, wird 20 Jahre lang zu Jahresbeginn eine Prämie eingezahlt. Die Auszahlung erfolgt am Ende des Todesjahres. Solange noch Prämien eingezahlt werden, wird im Todesfall auch die Hälfte der letzten Prämie rückerstattet. Zeige, dass die jährliche Nettoprämie

$$\frac{10.000A_x}{\left(1 + \frac{d}{2}\right) \ddot{a}_{x:\overline{20}|} - (1 - v^{20} {}_{20}p_x) / 2}$$

beträgt.

28. Eine diskrete lebenslängliche Todesfallversicherung wird an eine x-jährige Person ausgestellt. Es seien $P_x = \frac{4}{11}$, ${}_tV_x = 0.5$ und $\ddot{a}_{x+t} = 1.1$. Berechne i .
29. Betrachte eine lebenslängliche Todesfallversicherung über 1500 Geldeinheiten mit gleichen jährlichen Prämien auf ein Leben von x Jahren. Das Deckunsskapital nach Jahr $h - 1$ ist 179, nach Jahr h beträgt es 205. Weiters sei $i = 0.05$ und $\ddot{a}_x = 16.2$. Berechne $1000q_{x+h-1}$.
30. Für $q_{31} = 0.002$, $\ddot{a}_{32:\overline{13}|} = 9$ und $i = 0.05$ berechne ${}_1V_{31:\overline{14}|}$.
31. Berechne ${}_2V_{x:\overline{4}|}$ aus folgenden Werten:

k	$\ddot{a}_{\overline{k} }$	${}_{k-1 }q_x$
1	1.000	0.33
2	1.930	0.24
3	2.795	0.16
4	3.600	0.11

Ansprechperson bei Fragen zu den Beispielen ist Reinhold Kainhofer, reinhold@kainhofer.com, Zimmer C401 (Steyrergasse 30/IV).