Übungen Personenversicherungsmathematik
Übungszettel 1, 6. Oktober 2004

WS 2004/05, Univ.Ass. Reinhold Kainhofer

Die Beispiele der ersten paar Stunden stammen großteils aus dem Buch von Gerber.

1 Gesamtschaden eines Portfolios

Beispiel 1) Betrachte eine Lebensversicherung, wobei der Claim für Polizze h mit S_h bezeichnet wird. S_h habe drei mögliche Werte:

$$S_h = \begin{cases} 0 & \text{bei Überleben des versicherten Lebens } x, \\ 100 & \text{bei Aufgabe der Polizze,} \\ 1000 & \text{bei Ableben des versicherten Lebens } x. \end{cases}$$

Die Sterbewahrscheinlichkeit sei $q_{1,x} = 0.001$, die Wahrscheinlichkeit der Aufgabe $q_{2,x} = 0.15$, und die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Versicherten $q_{3,x} = 1 - q_{1,x} - q_{2,x}$. Benutze die Normalverteilungsapproximation, um die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_1 + \cdots + S_5 > 200)$ zu berechnen, dass der Gesamtschaden von fünf unabhängiden und identisch verteilten (i.i.d.) Polizzen $S = S_1 + \cdots + S_5$ einen Wert von 200 übersteigt. Berechne ebenso $\mathbb{P}(S_1 + \cdots + S_{50} > 2000)$. Interpretiere das Ergebnis kurz.

Beispiel 2) Es seien $f(0), f(1), f(2), \ldots$ Wahrscheinlichkeiten, die folgende Relationen erfüllen:

$$f(1) = 3f(0), \quad f(2) = 2f(0) + 1.5f(1)$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(3f(x-3) + 4f(x-2) + 3f(x-1)\right) \text{ für } x = 3, 4, \ldots.$$

Bestimme den Wert von $f(0)$!

Beispiel 3) Betrachte die (a, b)-Klasse von Verteilungen (die Verteilung Schadensanzahl folgt einer Relation $q_n = P(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) q_{n-1}$ für $n \geq 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$).

- Bestimme die jeweiligen Bereiche R_i für (a, b) für die Poisson-, Binomial- und die Negative Binomial-Verteilung.
- Zeige, dass die (a, b)-Bedingung für Werte $(a, b) \neq R_i$ für alle i keine Wahrscheinlichkeitsverteilung für Werte $N \in \mathbb{N}_0$ liefert.
- Zeige, dass die Poisson-, Binomial- und Negative Binomial-Verteilung die einzigen Verteilungen in $\mathbb{N}_0$ sind, welche die (a, b)-Bedingung erfüllen!

Beispiel 4) Der Gesamtschaden S sei annähernd normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2. Zeige, dass die Nettoprämie $\rho(\beta) = \mathbb{E}\left[(S - \beta)^+\right]$ einer Stop-loss Rückversicherung gegeben ist durch:

$$\rho\beta = (\mu - \beta)\Phi\left(\frac{\mu - \beta}{\sigma}\right) + \sigma\varphi\left(\frac{\mu - \beta}{\sigma}\right).$$

Hierbei bezeichnen Φ und φ die Verteilungsfunktion sowie die Dichte der Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$.