Übungsbeispiele zur Höheren LVM, Teil I

R. Kainhofer, Inst. f. Wirtschaftsmathematik, FAM, TU Wien

SS 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Verteilung einer Zufallsvariable A abhängig von bekannten Informationen B (Zufallsvariable(n), bzw. der davon erzeugten σ-Algebra).

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \wedge B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

totale Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\,\mathbb{P}(B_1) + \cdots + \mathbb{P}(A|B_n)\,\mathbb{P}(B_n) = \sum_{\text{alle mögl. } B_i} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$$

Bsp. 1) Ein medizinischer Test für eine Krankheit, die mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(K) = \frac{1}{10000}$ auftritt, ergibt bei einem Kranken immer ein richtiges Ergebnis, bei einem Gesunden ergibt der Test aber bei 1% der Fälle aber ein positives Ergebnis.

Wenn eine Person nun positiv getestet wird, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person tatsächlich krank ist?

1.1 Bedingter Erwartungwert

- Linearität: $\mathbb{E}(aY + bZ|X) = a\,\mathbb{E}(Y|X) + b\,\mathbb{E}(Z|X)$
- $\mathbb{E}(Y|X) \geq 0$, wenn $Y \geq 0$ (weil $\mathbb{E}(Y|X) = \sum_y y\,\mathbb{P}(Y|X) \geq 0$ termweise)
- $\mathbb{E}(1|X) = 1$
- $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$, wenn X und Y unabhängig
- $\mathbb{E}(g(X)Y|X) = g(X)\,\mathbb{E}(Y|X)$ für alle "geeigneten" g
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Y)$

1.2 Bedingte Varianz

Definiert als:

$$\mathrm{Var}(Y|X) = \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y|X))^2 \middle| X\right)$$

Es gilt: $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y|X))$.

2 Wh. Stochastische Prozesse

2.1 Poisson-Prozess

diskreter stochastischer Zählprozess, $\mathbb{P}_t(N = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$

- nur 1 Parameter λ, bestimmt Geschwindigkeit (je größer, desto mehr Ereignisse)
- $\mu = \mathbb{E}(N) = \lambda t$
- $\mathrm{Var}(N) = \lambda t = \mu$ (einziger wichtiger diskreter Prozess mit $\mathbb{E}(N) = \mathrm{Var}(N)$)
- gedächtnislos (Wahrscheinlichkeit für N Ereignisse hängt nicht von der Vergangenheit ab, nur von der betrachteten Zeitspanne)
- Zeit T (Zufallsvariable!) zwischen zwei Ereignissen ist exponentialverteilt: Dichte $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

Bsp. 2) Seien $N^{(1)}, \ldots N^{(n)}$ Poissonprozesse auf $t \in [0, \infty)$ mit Parametern $\lambda_1, \ldots \lambda_n$.
Zeige, dass $N^{(1)} + \cdots + N^{(n)}$ wieder ein Poisson-Prozess ist mit Parameter $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
Berechne $\mathbb{E}\left(N^{(1)} + \cdots + N^{(n)}\right)$.

2.2 Brown'sche Bewegung

- kontinuierlicher stochastischer Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$
- Herleitung z.B. über geeigneten Random Walk möglich:
  Schrittweite $\Delta t = 1/n$, Sprünge der Größe $\Delta W = 1/\sqrt{n}$, Grenzübergang $n \to \infty$ und zentralen Grenzwertsatz benutzen
- Zuwächse zwischen Zeit s und Zeit t sind nach der Normalverteilung verteilt (siehe Koller-Buch):
  $$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

Bsp. 3) Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung, und zwei Zeiten $t < u$ vorgegeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die BB zum Zeitpunkt t negativ, zum Zeitpunkt u aber positiv ist: $\mathbb{P}(W_t < 0, W_u > 0)$

3 Markovketten

3.1 in diskreter Zeit

Bsp. 4) Zeige, dass eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen in einer abzählbaren Menge S eine Markovkette ist! Wann ist sie homogen?

Bsp. 5) Jemand würfelt oft mit einem fairen Würfel (d.h. $P(X = j) = \frac{1}{6}$ für $j = 1, \ldots, 6$ bei jedem Wurf). Sei X_n das dabei bei den ersten n Würfen erzielte Maximum. Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markovkette ist und finde die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ij}(n)$!

Bsp. 6) Sei $\{S_n : n \geq 0\}$ ein einfacher Random Walk mit $S_0 = 0$ (diskreter Prozess, der immer genau einen Schritt nach links mit Wahrscheinlichkeit p oder rechts mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ macht).

Sei $M_n = \max\{S_k : 0 \leq k \leq n\}$ der größte dabei erreichte Punkt. Zeige, dass $Y_n = M_n - S_n$ eine Markovkette ist! Ist M_n eine Markovkette?

Bsp. 7) Wenn X und Y zwei Markovketten auf derselben Menge sind, ist dann $X + Y$ auch eine Markovkette?

Bsp. 8) Gegeben sei eine Markovkette mit der Übergangsmatrix $(0 \leq p \leq 1)$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{pmatrix}.$$

Berechne die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(n)$ für n Schritte der Markovkette.

Bsp. 9) Sei X eine Markov-Kette, und $\{n_r : r \geq 0\}$ eine aufsteigende Folge von ganzen Zahlen. Zeige, dass $Y_r = X_{n_r}$ eine (möglicherweise inhomogene) Markov-Kette darstellt (d.h. dass Teilfolgen einer Markov-Kette wieder Markov-Ketten sind)! Finde weiters die Übergansmatrix von Y, wenn $n_r = 2r$ und X ein einfacher Random Walk ist.

Bsp. 10) Betrachte einen Random Walk auf den Kanten einer dreiseitigen Pyramide (Tetraeder). Ein Teilchen beginnt an einer Ecke v und springt mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ zu jedem der drei angrenzenden Ecken. Wie groß ist die mittlere Zeit, bis das Teilchen wieder am Ausgangspunkt zurückgekehrt ist? Wie groß ist die mittlere Zeit, bis das Teilchen einen benachbarten Eckpunkt s erreicht?

Bsp. 11) Es seien zwei Markov-Ketten gegeben mit Zustandsraum $S = \{1,2,3,4\}$ und den Übergangsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die einzelnen Zustände in beiden Fällen! Für A berechne $p_{34}(n)$ und bestimme die Wahrscheinlichkeit von Absorption im Zustand 4, wenn man im zustand 3 startet, mit $\frac{2}{3}$. Im Fall B bestimme die stationäre Verteilung (jene Verteilung auf die Zustaende, dass sich bei nochmaliger Anwendung der Matrix, also mit einem weitern Schritt der Markov-Kette, nichts mehr ändert).

Kategorisierung der Zustände einer Markov-Kette:

- Zustand i ist absorbierend, wenn $p_{ii} = 1$ und $p_{ij} = 0$ für $i \neq j$.
- Zustand i ist transient, wenn die Rückkehrwahrscheinlichkeit < 1 ist.
- Zustand i ist rekurrent, wenn die Rückkehrwahrscheinlichkeit $= 1$ ist. Positiv rekurrent, wenn die Rückkehrzeit endlich ist.
- Markov-Kette ist irreduzibel, wenn jeder Zustand von jedem anderen in einer endlichen Anzahl von Schritten erreicht werden kann.
- Zustand i ist periodisch (Periode α), wenn er nur zu den Zeiten $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ erreicht werden kann.
- Rekurrenter Zustand i ist ergodisch, wenn er positiv rekurrent und aperiodisch ist.

3.2 in stetiger Zeit

Bsp. 12) Gegeben sei eine homogene Markov-Kette X auf $\{1,2\}$ in stetiger Zeit mit Generator

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda\mu > 0.$$

Gesucht sind:

(a) Die Vorwärts-Differentialgleichungen und deren Lösung für $p_{ij}(t)$, $i,j = 1,2$ $(= P(t))$.

(b) Die stationäre Verteilung (d.h. jene Verteilung π mit $\pi \cdot \Lambda = 0$ bzw. $\pi \cdot \mathbf{P}(t) = \pi$.

(c) Zeige, dass $p_{ij}(t) \longrightarrow \pi_j$ für $t \to \infty$.

Bsp. 13) Aufbauend auf den Ergebnissen des letzten Beispiels 12 finde die Wahrscheinlichkeiten

(a) $\mathbb{P}\left(X(t) = 2 \mid X(0) = 1, X(3t) = 1\right)$

(b) $\mathbb{P}\left(X(t) = 2 \mid X(0) = 1, X(3t) = 1, X(4t) = 1\right)$

Ist dieses Ergebnis verwunderlich?

Bsp. 14) Die Schadensmeldungen in einer Versicherung erfolgen nach einem Poisson-Prozess mit Intensität λ. Sie werden vom zuständigen Sachbearbeiter in der Reihenfolge des Eintreffens abgearbeitet, wobei die dafür benötigte Zeit (unabhängig voneinander) der Exponentialverteilung mit Parameter μ folgt. Sei $X(t)$ die Anzahl der Meldungen beim Sachbearbeiter (in Bearbeitung oder darauf wartend) zur Zeit t, wobei $X(0) = 0$.

Erkläre, wieso $X(t)$ eine Markov-Kette ist! Ist sie homogen? Finde weiters ihren Generator, und zeige, dass eine stationäre Verteilung π (mit $\pi \cdot \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{0}$) existiert, dann und nur dann, wenn $\lambda < \mu$. In diesem Fall, berechne die stationäre Verteilung!

Bsp. 15) Im letzten Beispiel, berechne die (bedinge) Wahrscheinlichkeit, im Intervall $[s,t]$ immer im Zustand j zu bleiben (natürlich wenn wir zur Zeit s schon im Zustand j sind). Anschaulich ist das die Wahrscheinlichkeit, dass im Intervall $[s,t]$ keine Meldungen abgearbeitet werden und auch keine neuen Schäden gemeldet werden.

4 Deterministische Zahlungsströme

Bsp. 16) Eine Versicherung betätigt in einem konkreten Fall eine Auszahlung von 100 € zur Zeit $t = 10$, und eine stetige Auszahlung mit Intensität $c = 50$ € pro Zeiteinheit zwischen $t = 10$ und $t = 15$. Bei stetiger Verzinsung mit Zinsintensität $\delta(t) = \frac{1}{20}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ berechne den Wert dieses Zahlungsstromes zur Zeit t!

5 Stochastischer Zins

5.1 in diskreter Zeit

Bsp. 17) Betrachte ein stochastisches Zinsmodell in diskreter Zeit mit

$$i_t = 0.05 + 0.01X_t, \qquad \text{mit } X_t \sim D\mathcal{E}(1),$$

wobei $D\mathcal{E}(\lambda)$ die Doppel-Exponentialverteilung mit Parameter λ bezeichnet. Deren Dichte ist $f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Eine Versicherung zahlt zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, 3$ jeweils einen Betrag von 100 € aus. Wie viel Geld muss jetzt mit obiger Verzinsung angelegt werden, damit sich die Versicherung die entsprechenden Zahlungen leisten kann? Benutze das Bewertungsprinzip B aus dem Buch!

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zur Zeit $t = 1$ ein negativer Zinssatz auftritt?

Bsp. 18) Betrachte ein stochastisches Zinsmodell in diskreter Zeit mit

$$i_t = 0.05 + 0.01X_t, \qquad \text{mit } X_t \sim \mathcal{E}(t).$$

Eine Versicherung zahlt zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, 3$ jeweils einen Betrag von 100 € aus. Wie viel Geld muss jetzt mit obiger Verzinsung angelegt werden, damit sich die Versicherung die entsprechenden Zahlungen leisten kann?

Bsp. 19) Betrachte ein stochastisches Zinsmodell in diskreter Zeit mit

$$i_t = 0.01X_t, \qquad \text{mit } X_t - X_{t-1} \sim \mathcal{E}(t).$$

Schreibe die Formel zur Berechnung von v_t nach Bewertungsprinzip A als Integral an!

5.2 in stetiger Zeit

Bsp. 20) Im stetigen Zinsmodell mit Brownscher Bewegung ($\delta_t = \delta + \sigma W_t$, wobei W_t eine standardisiert Brownsche Bewegung darstellt) berechne $v(t)$. Wie groß ist der Diskontierungsfaktor im Mittel?

Bsp. 21) Betrachte das Vasicek-Modell ohne den stochastischen Term. Die Zinsintensität ist dann

$$\delta_t = \gamma e^{-\alpha t} + \delta\,. \tag{1}$$

Berechne $v(t)$!

Zu den Zeitpunkten $t_1 = 3$ und $t_2 = 5$ werden einmalige Zahlungen der Höhe 100 € geleistet. Wie viel sind diese Zahlungen heute wert?

Bsp. 22) Im Beispiel 21 erfolgt zwischen den Zeiten $t_a = 2$ und $t_e = 3$ eine stetige Auszahlung mit der konstanten Intensität $c = 100$.

Wie viel ist diese Auszahlung heute wert? Wie viel ist die stetige Auszahlung kombiniert mit den beiden diskreten Auszahlungen wert?

Bsp. 23) Im Beispiel 22 sei die Anfangszeit t_a gleichverteilt im Zeitintervall $[0, 3]$, die Dauer der Auszahlung konstant eine Zeiteinheit.

Wie viel ist diese Auszahlung heute wert?

Bsp. 24) Im Beispiel 23 sei zusätzlich die Dauer der Zahlung exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Insgesamt haben wir damit eine stetige Zahlung mit konstanter Intensität c, deren Anfangszeitpunkt in $[0, 3]$ gleichverteilt ist, und eine Auszahlungsdauer $d \sim \mathcal{E}(1)$. Die Verzinsung ist gegeben durch die Intensität $\delta_t = \gamma e^{-\alpha t} + \delta$.

Wie viel ist diese Auszahlung heute wert?

5.3 Ein diskretes, stochastisches Zinsmodell

Das folgende Beispiel stammt aus der Veröffentlichung [1] und zeigt deutlich die Unterschiede bei stochastischen Zinsmodellen im Vergleich zu deterministischen.

Bsp. 25) Betrachte folgendes Modell: Die stochastische Diskontierungsfunktion ϕ_t (Diskontierung von Zeit t auf Zeit 0) wird wie repräsentiert als $\phi_t = \prod_{j=1}^{t} Y_j$. Dabei sind die Y_j (einjährliche stochastische Diskontierungsvariablen) unabhängige diskrete Zufallsvariablen mit Werten $\frac{k}{N}$ $(0 \leq k \leq N)$ und binomischer Verteilung $P\left(Y_j = \frac{k}{N}\right) = \binom{N}{k} p_j^k (1 - p_j)^{N-k}$.

Es seien die $p_1, p_2, \ldots$ am Beginn festgelegt, und die $(Y_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ seien unabhängig gegeben $p_1, \ldots, p_n$.

Als ein Spezielfall betrachte den Fall dass alle p derselben Zufallsvariable folgen (und damit perfekt abhängig sind) $p = p_1 = p_2 = \ldots$. Daraus folgt, dass die Y_j alle u.i.v. sind.

Die Verteilung sei $p \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ mit:

$$f(p) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1}(1 - p)^{\beta-1}, \quad 0 \leq p \leq 1, \alpha, \beta > 0$$

Bestimme für $\alpha = 4$ und $\beta = 1$ die Diskontierungsfaktoren D_t von Zeit t auf 0 als Erwartungswerte der Diskontierungsfunktion, und die Diskontierungsfaktoren $D_{t \to t-1}$ von t auf $t - 1$. Vergleiche diese mit einer fixen Verzinsung, die jedes Jahr denselben Diskontierungsfaktor wie im ersten Jahr aufweist!

Hinweise: Für die Beta-Verteilung gilt ($\Gamma(n) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$):

$$E[p] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$
$$Var[p] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$
$$E[p^m] = \frac{\Gamma(\alpha + m)\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + m)\Gamma(\alpha)}$$

Aus den Modellannahmen folgt, dass die $p_1, p_2, \ldots, p_n$ eine stochastische Zeitreihe darstellen und bei fixen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die $(Y_j)_{j=1,2,\ldots,n}$ unabhängig sind. Daher gilt

$$D_t = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\phi_t \middle| p_1, \ldots, p_t\right]\right] = \mathbb{E}\left[p_1 p_2 \cdots p_m\right].$$

Setzt man die numerischen Werte in die obigen Formeln ein, ergibt sich: $\mathbb{E}[p] = D_1 = 0.8$, $Var[p] = 0.0267$, sowie $\sigma(p) = 0.1633$. Die Diskontierungsfaktoren berechnen sich nun als

$$D_t = \frac{(\alpha + t - 1)!(\alpha + \beta - 1)!}{(\alpha - 1)!(\alpha + \beta + t - 1)!}$$

sowie $D_{t \to t-1} = \frac{\alpha + t - 1}{\alpha + \beta + t - 1}$. Die Diskontierung von Zeit t auf Zeit $s < t$ ergibt sich analog.

6 Stochastische Analysis

6.1 Stochastische Integrale, Itô-Formel

Die folgenden Beispiele stammen großteils aus den Büchern "Øksendal, Bernt: Stochastic Differential Equations, Springer Verlag, 1998" und "Mikosch, Thomas: Elementary Stochastic Calculus with Finance in View, World Scientific Press, 1998"."

Lemma 1 (Ito Lemma, einfache Variante)**.** *Für $f(x)$ zweimal differenzierbar gilt für $X_t = f(B_t)$*

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t f'(B_x)dB_x + \frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)dx, \qquad s < t,$$
$$\textit{bzw. } dX_t = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt$$

Lemma 2 (Ito Lemma, erweiterte Variante)**.** *Für $f(t,x)$ mit stetigen zweiten Ableitungen gilt für $X_t = f(t, B_t)$*

$$f(t, B_t) - f(s, B_s) = \int_s^t \left(f_1(x, B_x) + \frac{1}{2}f_{22}(x, B_x)\right)dx + \int_s^t f_2(x, B_x)dB_x, \qquad s < t,$$
$$\textit{bzw. } dX_t = \left(f_1(t, B_t) + \frac{1}{2}f_{22}(t, B_t)\right)dt + f_2(t, B_t)dB_t$$

Lemma 3 (Ito Lemma, Erweiterung II für mehrere BB)**.** *Für $f(t,x,y)$ mit stetigen zweiten Ableitungen gilt für $X_t = f(t, B_1(t), B_2(t))$*

$$\begin{aligned} f(t, B_1(t), B_2(t)) - f(s, B_1(s), B_2(s)) &= \int_s^t f_1(x, B_1(x), B_2(x))\, dx \\ &+ \sum_{i=2}^{3}\int_s^t f_i(x, B_1(x), B_2(x))\, dB_i(x) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{2}\sum_{j=2}^{3}\int_s^t f_{ij}(x, B_1(x), B_2(x))\, dx, \qquad s < t, \end{aligned}$$

$$\textit{bzw. } dX_t = f_1(t, B_1(t), B_2(t))\, dt + \sum_{i=2}^{3} f_i(t, B_1(t), B_2(t))\, dB_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{3} f_{ij}(t, B_1(t), B_2(t))\, dt\,.$$

Lemma 4 (Ito Lemma für Itô-Prozesse)**.** *Für $f(t,x)$ mit stetigen zweiten Ableitungen gilt mit einem Itô-Prozess $X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB_s$ (bzw. $dX_t = a(t)dt + b(t)dB_t$), dass*

$$\begin{aligned} &f(t, X_t) - f(s, X_s) \\ &= \int_s^t \left(f_1(\tau, X_\tau) + a(\tau)f_2(\tau, X_\tau) + \frac{1}{2}b(\tau)^2 f_{22}(\tau, X_\tau)\right)d\tau + \int_s^t b(\tau)f_2(\tau, X_\tau)dB_\tau \\ &= \int_s^t \left(f_1(\tau, X_\tau) + \frac{1}{2}b(\tau)^2 f_{22}(\tau, X_\tau)\right)d\tau + \int_s^t f_2(\tau, X_\tau)dX_\tau, \qquad s < t, \end{aligned}$$

Bsp. 26) Schreibe den Prozess X_t jeweils in der Standardform $dX_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dB_t$ für Itô-Prozesse:

(a) $X_t = B_t^2$

(b) $X_t = 2 + t + e^{B_t}$

(c) $X_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$ mit $(B_1(t), B_2(t))$ einer 2-dim. Brownschen Bewegung.

Bsp. 27) Zeige, dass

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds\,!$$

6.2 Stochastische Differentialgleichungen

Bsp. 28) Zeige, dass $X_t = e^{B_t}$ die stochastische Differentialgleichung $dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t dB_t$ erfüllt!

Bsp. 29) Zeige, dass $X_t = \frac{B_t}{1+t}$ (mit $B_0 = 0$) die folgende stochastische Differentialgleichung erfüllt:

$$dX_t = -\frac{1}{1+t} X_t dt + \frac{1}{1+t} dB_t \quad \text{mit } X_0 = 0$$

Bsp. 30) Löse die stochastische Differentialgleichung $dX_t = X_t dt + dB_t$.

Hinweis: Multipliziere beide Seiten mit dem "integrierenden Faktor" e^{-t} und vergleiche das Ergebnis mit $d(e^{-t} X_t)$!

Bsp. 31) Löse die stoch. DG $dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t$!

7 Vasiček Modell, Mean-reverting Ornstein-Uhlenbeck Prozess

Diese Beispiele wurden großteils schon in der Vorlesung gezeigt.

Bsp. 32) Löse die stochastische Differentialgleichung

$$dr_t = \alpha \left(\rho - r_t\right) dt + \sigma dW_t \,,$$

welche die Spotrate im Vasiček-Modell charakterisiert! r_t wird auch (mean-reverting) Ornstein-Uhlenbeck Prozess genannt.

Lösungshinweise: Substituiere $y_t = r_t - \rho$, dann $z_t = e^{\alpha t} y_t$, um auf $dz_t = \sigma e^{\alpha t} dW_t$ zu kommen. Integration und schließlich Rücksubstitution liefert die Lösung

$$r_t = r_0 e^{-\alpha t} + \rho(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

welche als Konvexkombination von Anfangszins r_0 und langjährigem Mittel ρ plus einer stochastischen Störung (stoch. Integral) aufgefasst werden kann. Insbesondere klingt der deterministische Teil (abhängig von α) relativ schnell von r_0 auf ρ ab.

Bsp. 33) Berechne $\mu = \mathbb{E}[r_t]$ und $\sigma^2 = Var[r_t]$ für das Vasiček-Modell und zeige, dass $r_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$!

Lösung: Aus obiger Form der Lösung sieht man, dass r_t normalverteilt ist mit $\mu = r_0 e^{-\alpha t} + \rho(1 - e^{-\alpha t})$, da das stochastische Integral normalverteilt ist. $Var[r_t] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - \exp(-2\alpha t))$.

Bsp. 34) Zeige, dass $Cov(r_s, r_t) = \exp\left(-\alpha(s+t)\right) \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left(\exp(2\alpha s) - 1\right)$ mit $s \leq t$ für das Vasiček-Modell!

Bsp. 35) (Übung 9.2.2 aus Koller) Berechne die 95% Konfidenzintervalle für r_t mit $\alpha = 0.1$, $\rho = 0.05$, $r_0 = 0.03$ und $\sigma = 0.01$ für die Dauer von 20 Jahren.

Bsp. 36) (Satz 9.2.3 aus Koller) Sei $y(t) = \int_0^t r_s ds$ der Logarithmus des aufgelaufenen Zinses. Berechne dessen Charakteristika:

(a) $\mathbb{E}[y(t)] = \rho t + \frac{r_0 - \rho}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha t))$

(b) $Var[y(t)] = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} t + \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} (-3 + 4\exp(-\alpha t) - \exp(-2\alpha t))$

(c) $Cov(y(s), y(t)) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \min(s,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} \left(-2 + 2e^{-\alpha s} + 2e^{-\alpha t} - e^{-\alpha|t-s|} - e^{-\alpha(t+s)}\right)$

8 Deckungskapital

8.1 Deckungskapital bei zufälligen Zahlungsströmen

In den folgenden Beispielen soll eine konstante Sterblichkeit (also unabhängig vom Alter) zwischen 0 und 120 Jahren angenommen werden. Der Todeszeitpunkt ist also nach $U(0,120)$ verteilt, die Dichte beträgt demgemäß $p_0(t) = \frac{t}{120}$, die Überlebenswahrscheinlichkeit $p_{**}(s,t) = \frac{t-s}{120-s}$.

Bsp. 37) Betrachte eine Pensionsversicherung, bei der ab dem 60. Lebensjahr 10000 € pro Jahr stetig auszahlt werden. Die Zinsintensität sei dabei

$$\delta(t) = 0.03 + 0.001t\,.$$

Berechne die Deckungskapitalien $V_\dagger(t, A_*)$ und $V_*(t, A_*)$ für eine neugeborene, eine 35, eine 65 und eine 70 jährige Persion.

Bsp. 38) Wie das letzte Beispiel, jedoch soll das Deckungskapital nur für die nächsten 30 Jahre berechnet werden.

Bsp. 39) Betrachte eine spezielle Waisenrente, die nach dem Ableben der Person folgendermaßen ausbezahlt wird: 10.000 € einmal im Zeitpunkt des Ablebens, danach 5 Jahre lang 5000 € stetige Auszahlung pro Jahr. Berechne auch hier das Deckungskapitel mit der in Beispiel 37 angegebenen Zinsintensität und für die dort gefragten Fälle.

Bsp. 40) Betrachte eine kombinierte Renten- und Waisenversicherung, die sowohl die Zahlungen von Beispiel 37, als auch von Beispiel 39 mit den dort angegebenen Zinsintensitäten beinhaltet. Berechne die totale Reserve für die gefragten Fälle.

8.2 Diskrete Modelle: Thielesche Differenzengleichungen

Die folgenden Beispiele stammen aus Kapitel 4.8 des Buches von Michael Koller [4]. Dort finden sich auch die Lösungswege und Tabellen der numerisch generierten Lösungen.

Bsp. 41) Betrachte eine diskrete Todesfallversicherung mit Sterbedichte

$$\mu_{*\dagger}(x) = \exp\left(-0.13275 + 8.09438 \cdot 10^{-2}x - 1.10180 \cdot 10^{-5}x^2\right).$$

Bei einer Verzinsung von 3.5% pro Jahr, und einer Todesfallsumme von 200 000 €, wie groß ist die Einmalprämie für eine 30-jährige Person, wenn die Polizze ein Schlussalter von 65 Jahren aufweist? Stelle die Thielesche Differenzengleichung auf und löse sie rekursiv!

Bsp. 42) Wie letztes Beispiel, jedoch wird im Erlebensfall (bei Erreichen eines Alters von 65 Jahren) auch eine Zahlung von 100 000 € geleistet. Wie groß ist die Einmalprämie?

Bsp. 43) Wie letztes Beispiel, jedoch wird die Prämie nicht einmalig geleistet, sondern jährlich. Wie groß ist diese jährliche Prämie, die zu Beginn jedes Jahres geleistet werden muss?

Bsp. 44) Betrachte eine Invaliditätsversicherung ohne Reaktivierung mit folgenden Übergangsintensitäten:

$$\mu_{*\diamond}(x) = 0.0004 + 10^{0.06x-5.46}$$
$$\mu_{*\dagger}(x) = \mu_{\diamond\dagger}(x) = 0.0005 + 10^{0.038x-4.12}$$

Bei einem Schlussalter von 65 Jahren und einer jährlichen Verzinsung von 3.5% berechne die Einmalprämie für eine 30-jährige Person bei einer Auszahlung von 1 Geldeinheit zu Jahresbeginn im Invaliditätsfall. Stelle die Thieleschen Differenzengleichungen (a) auf für den Fall der Prämienbefreiung im Invaliditätsfall und (b) ohne Prämienbefreiung, und löse sie rekursiv! Was sind die Randbedingungen?

Bsp. 45) Wie letztes Beispiel, jedoch mit jährlicher Prämie P.

Bsp. 46) Wie die letzten beiden Beispiele, jedoch wird auch Reaktivierung mit $\mu_{\diamond *}(x) = 0.05$ zugelassen.

Bsp. 47) Modelliere die Versicherung aus den Beispielen 44 und 45 bei einer Wartefrist von 1 Jahr!

8.3 Stetige Modelle: Thielesche Differentialgleichungen

Die folgenden Beispiele stammen aus Kapitel 5.3 des Buches von Michael Koller [4]. Dort finden sich auch die Lösungswege und Tabellen der numerisch generierten Lösungen.

Bsp. 48) (Todesfallsversicherung) Betrachte eine stetige Todesfallversicherung mit Sterbedichte

$$\mu_{*\dagger}(x) = \exp\left(-0.13275 + 8.09438 \cdot 10^{-2}x - 1.10180 \cdot 10^{-5}x^2\right).$$

Bei einer Verzinsung von 3.5% pro Jahr, und einer Todesfallsumme von 200 000 €, wie groß ist die Einmalprämie (bzw. das Deckungskapital) für eine 30-jährige Person, wenn die Polizze ein Schlussalter von 65 Jahren aufweist? Stelle die Thieleschen Differentialgleichungen auf und löse sie!

Bsp. 49) (gemischte Todesfallversicherung) Wie letztes Beispiel, jedoch wird im Erlebensfall (65 Jahre) auch eine Zahlung von 100 000 € geleistet. Wie groß ist die Einmalprämie bzw. das Deckungskapital $W_*(t)$? Vergleiche die Werte mit den Resultaten von Beispiel 43.

Bsp. 50) Wie letztes Beispiel, jedoch wird die Prämie nicht einmalig geleistet, sondern stetig mit Intensität c. Bestimme diese Prämienintensität!

Bsp. 51) Wie Beispiel 49, jedoch wird die Prämie nicht einmalig geleistet, sondern jährlich. Wie groß ist diese jährliche Prämie P, die zu Beginn jedes Jahres geleistet werden muss?

Bsp. 52) Betrachte das diskrete Modell und nimm an, dass die Zahlungen immer in der Jahresmitte geleistet werden (also im stetigen Modell die Person immer zu Jahresmitte stirbt).

Bsp. 53) Betrachte die Versicherung aus Beispiel 49, jedoch mit nicht-konstantem Zins $i(t) = 0.06 - \frac{0.03}{35}(t-30)$ (also einem linear von 6% auf 3% fallenden Jahreszins).

Bsp. 54) (Invaliditätsversicherung) Betrachte eine stetige Invaliditätsversicherung ohne Reaktivierung mit:

$$\mu_{*\diamond}(x) = 0.0004 + 10^{0.06x-5.46}$$
$$\mu_{*\dagger}(x) = \mu_{\diamond\dagger}(x) = 0.0005 + 10^{0.038x-4.12}$$

Bei einem Schlussalter von 65 Jahren, einer jährlichen Verzinsung von 3.5% und einer Auszahlung von 1 im Invaliditätsfall berechne die Einmalprämie für eine 30-jährige Person. Stelle die Thieleschen Differenzengleichungen auf und löse sie!

Bsp. 55) Wie letztes Beispiel, jedoch mit jährlicher Prämie P.

Bsp. 56) Wie die letzten beiden Beispiele, jedoch wird auch Reaktivierung mit $\mu_{\diamond *}(x) = 0.05$ zugelassen.

Bsp. 57) (Renten auf zwei Leben) Betrachte eine Rente auf zwei unabhängige Leben, die beide die Sterbeintensitäten aus Beispiel 48 besitzen. Betrachte einen technischen Zinssatz von 3.5% und ein Alter von $x_1 = x$ sowie $x_2 = x + \Delta t$ Jahre. Das maximale Alter sei $\omega = 114$ Jahre.

Betrachte drei verschiedene Modelle:

(a) Auszahlung von 1 nur im Fall, dass beide Personen leben $**$ (wenn $x_1 \geq 65$).

(b) Auszahlung von 1 nur im Fall, dass die zweite Person tot $*\dagger$ (wenn $x_1 \geq 65$).

(c) Auszahlung von 1 nur im Fall, dass die erste Person tot $\dagger*$ (wenn $x_1 \geq 65$).

Stelle jeweils die Thielesche Differentialgleichung auf und versuche, sie zu lösen (mit $x_1 = 30$, $\Delta t = 5$).

Bsp. 58) Betrachte die Rente aus dem letzten Beispiel mit dem Zusatz, dass im Zustand $*\dagger$ und $\dagger*$ die Sterblickeit um 15% zunimmt (also verwitwete Personen eher sterben, als wenn beide Ehepartner noch am Leben sind).

Bsp. 59) (Versicherung auf zwei Leben) Betrachte eine Ablebensversicherung auf zwei (unabhängige) Leben mit den Sterbeintensitäten aus Beispiel 48

Bsp. 60) Betrachte eine Waisenrente im Beispiel 57, wenn als Halbwaise 5 000 € und als Vollwaise 10 000 € ausbezahlt werden, jedoch nur bis zum Alter von 25 Jahren des Kindes.

Bsp. 61) Betrachte eine stetige Rente (inlusive Waisenrente). Die Sterbeintensität sei von der Form $\mu_{*\dagger}(x) = \exp\left(-a + bx - cx^2\right)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ (z.B. wie im Koller-Buch $a = 9.13275$, $b = 8.09438 \cdot 10^{-2}$, und $c = 1.10180 \cdot 10^{-5}$), die Versicherung soll 40 Jahre nach Vertragsabschluss auslaufen, und die Verzinsung sei konstant mit einem Jahreszins von 3.5%. An eine lebende Person wird eine Rente ausbezahlt der Intensität $(x - 50)^2/100$ (x ist dabei das Alter der Person), nach dem Tod der Person soll an die Erben eine Rente mit konstanter Intensität $c = 5$ Geldeinheiten pro Jahr stetig ausbezahlt werden. Stelle die Thieleschen Differentialgleichungen (und die Randbedingungen) für die Deckungskapitalia und damit auch für die nötige Einmalprämie auf, wenn die Versicherung von einer 20-jährigen Person abgeschlossen wird!

Bsp. 62) Betrachte eine stetige Invaliditätsrente (Schlussalter 65 Jahre) mit Reaktivierung mit den Intensitäten:

$$\begin{aligned} \mu_{*\diamond}(x) &= 0.0004 + 10^{(0.060x - 5.46)} \\ \mu_{*\dagger}(x) = \mu_{\diamond\dagger}(x) &= 0.0005 + 10^{(0.038x - 4.12)} \\ \mu_{\diamond*(x)} &= 0.1 \end{aligned}$$

Es erfolgt eine stetige Auszahlung von 1 im Invaliditätsfall, und eine einmalige Zahlung von 10 am Ende der Laufzeit, wenn die Person nie invalid war. Stelle die Thieleschen Differentialgleichungen (und die Randbedingungen) für die Deckungskapitalia und die Einmalprämie auf! Welche Zustände werden für diese Modellierung benötigt?

9 Beispiele und Probleme aus der Praxis

Die in diesen Stunden diskutierten Beispiele finden sich in Kapitel 6 des Buches von Michael Koller [4]. Insbesondere sind dies die Themen:

- *Unterjährige Zahlungen*: vierteljährliche Leistungen der Versicherung, Taylor-Entwicklung wurde ausgelassen, dafür saison-abhängige Wahrscheinlichkeiten kurz erklärt.
- *Garantierte Renten*: Rentenzahlungen für eine gewisse Dauer garantiert, auch wenn in dieser Zeit der Tod eintritt. Dies kann modelliert werden durch einen zusätzlichen Zustand, der derartige Informationen aus der Vergangenheit noch zusätzlich anzeigt. Ansonsten verläuft die Modellierung gleich wie bisher.

- *Rückgewähr*: In bestimmten Situationen (ab der keine weiteren Leistungen der Versicherung erfolgen z.B. Tod bei einer Rente oder Invalidenversicherung) wird auch ein Anteil α des Deckungskapitals $V_X^+(t)$ von der Versicherung ausbezahlt. Dies schlägt sich in einem Vorfaktor in der Thieleschen Differenzengleichung nieder, meist ist dieser von der Form $\frac{1}{1-v\alpha p}$ (wobei p die Wahrscheinlichkeit für das entsprechende Ereignis bezeichnet).
- *Renten auf mehrere Leben*: Die Zustände sind einfach die verschiedenen Kombinationen der Einzelzuständer der involvierten Personen (z.B. $(*\dagger)$ fuer Mann lebend, Frau tot). Für die Übergangswahrscheinlichkeiten müssen Annahmen getroffen werden (unter anderem):
  - Unabhängigkeit: $p_{(ab)\to(cd)}(x) = p_{ac}^{\text{Mann}}(x) p_{bd}^{\text{Frau}}(x)$
  - Höhere Sterblichkeit von Witwen: z.B. $p_{(\dagger *)\to(\dagger\dagger)}(x) = p_{\dagger\dagger}^{\text{Mann}}(x) \left(p_{*\dagger}^{\text{Frau}}(x) + \alpha \right)$
- *Invaliditätsversicherungen mit Reaktivierung abhängig von der Dauer der Invalidität*: Soll die Reaktivierungswahrscheinlichkeit sich mit der bisherigen Dauer der Invalidität ändern, muss dies durch zusätzliche Zustände ($\diamond_i$ für das i-te Invaliditätsjahr) modelliert werden. Am besten zeichnet man sich dann ein Diagramm der einzelnen Zustände und der möglichen Übergänge mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, bevor man die Differenzengleichungen aufstellt.

Bsp. 63) Betrachte eine Pensions-Ausfallsversicherung: Ein Ehepaar versichert sich gegen den Ausfall (Tod) einer der beiden Altersrenten. Wenn eine der beiden Personen tot ist, zahlt die Versicherung eine jährliche Leistung von 1 Geldeinheit. Modelliere diese Versicherung!

Bsp. 64) Wie letztes Beispiel 63, jedoch wird für den Fall, dass beide Personen gleichzeitig sterben (und damit keinerlei Leistungen von der Versicherung erbracht werden), eine Rückgewähr von $\alpha V_{**}(t)$ an die Erben gewährt.

Literatur

[1] H. Bühlmann. Stochastic discounting. *Insurance: Mathematics and Economics*, 11:113–127, 1992.

[2] Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker. *Probability and random processes: Problems and solutions.* Clarendon Press, Oxford, 1992.

[3] Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker. *Probability and random processes.2nd ed.* Oxford University Press, Oxford, 1992.

[4] Michael Koller. *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung. (Stochastic models in life insurance).* Springer, Berlin, 2000.

[5] Thomas Mikosch. *Elementary stochastic calculus with finance in view.*, volume 6 of *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability.* World Scientific, Singapore, 1998.

[6] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations. An introduction with applications. 5th ed.* Universitext. Springer, Berlin, 1998.