

# “Einführung in die Finanzmathematik: Diskrete Modelle”

Reinhold Kainhofer, Johannes Leitner

## 1 Das Ein-Periodenmodell

1. Definitionen
  - Modell, Handelsstrategie, (diskontierter) Wert-, Preisprozess
  - Arbitrage, dominierende Handelsstrategie
  - lineares Preismaß, Zusammenhang zu dom. HS, Gesetz des eindeutigen Preises
2. Risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß (Martingalmaß)
  - No-arbitrage Theorem
3. Bewertung von Contingent Claims - attainable CC, replizierendes Portfolio
  - Risikoneutrales Bewertungsprinzip, Beispiele: Optionen
  - Elementar-Claims, Zustandspreise, Linearität des Preises
4. Vollständigkeit
  - Zusammenhang mit Eindeutigkeit des RNM
  - unvollständige Märkte: Schranken für Preis, Sub-/Superhedging
5. Optimale Portfolios, Zulässigkeit
  - Nutzenfunktionen
  - Zusammenhang mit “No arbitrage”, explizite Form eines RNM

## 2 Wh. Wahrscheinlichkeitstheorie

- W-Raum,  $\sigma$ -Algebra, W-Maß, ZV, Ereignis, Messbarkeit, endliche  $\sigma$ -Algebren
- absolut stetige Maße, äquivalente Maße, Radon-Nikodym
- Stochastische Prozesse: Filtrierungen, adaptierte Prozesse

## 3 Mehr-Periodenmodell in diskreter Zeit

- Marktmodell: Bankkonto (Numéraire), Asset-Preise, Annahmen
- Handelsstrategien: Wert des Portfolios, selbst-finanzierend
- Diskontierung
- Bewertungsfunktionale: erreichbare Gewinne, Gesetz des eindeutigen Preises
- Dualität Bewertungsfunktionale und Preis (Hahn-Banach, Trennungssatz für Beweis)
- Arbitrage-Freiheit
- Satz von Dalang, Morton, Willinger: äquivalente Bedingungen zu Arbitrage-Freiheit
- vollständige Märkte

## 4 Wh. Martingalthorie

- Bedingte Erwartungen, Eigenschaften
- stochastischer Kern
- Martingale, Doob'sche Zerlegung, Bayes'sche Formel
- Stoppzeiten, Optimal Stopping Theorem, gestoppte Prozesse

## 5 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

- Shape-Ratio
- Portfolio-Optimierungsproblem, Varianz-Optimierung, Mean-variance efficient
- Nutzen-Optimierung, duales Optimierungsproblem, nutzen-indifferente Preise

## 6 Das Binomialmodell

- Definition des Modells, Assets, Entwicklung (Baum, Gitter)
- Cox-Ross-Rubinstein Modell
- No arbitrage Bedingungen
- Bepreisung, Bestimmung des replizierenden Portfolios
- Europäische Call-Option
- Verteilung des Maximums eines Pfades (Reflection Principle)

## 7 Markov Modelle

- Definition Markov-Prozesse, Markov-Eigenschaft
- Erhaltung der Markov-Eigenschaft unter äquiv. Martingalmaßen
- Faktormodell bei stochastischem Zins

## 8 Grenzübergang Binomialmodell zu Black-Scholes

- Schwache Konvergenz, zentraler Grenzwertsatz
- Reskalierung des BM: Taylor-Approximation, Grenzübergang
- Black-Scholes Formel für Europäische Calls, Herleitung

## 9 Amerikanische Optionen

- Definition
- Snell'sche Einhüllende (Envelope)
- optimale Stoppzeit, Zusammenhang mit Snell'scher Envelope
- Zerlegung von Supermartingalen (Doob'sche Zerlegung), Anwendung auf Am. Optionen
- Zusammenhang der Preise von Europ. und Am. Optionen

## 10 Optimale Portfolios und Martingalmethoden

### Literatur

- [FS04] Hans Föllmer and Alexander Schied. *Stochastic finance. An introduction in discrete time*, volume 27 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004.
- [LL96] Damien Lambertson and Bernard Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall, London, 1996.
- [Pl97] Stanley R. Pliska. *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*. Cambridge University Press, June 1997.
- [Shr04] Steven E. Shreve. *Stochastic calculus for finance. I: The binomial asset pricing model*. Springer Finance. Springer-Verlag, New York, 2004.